مثال : لنأخذ الشبكة الممثلة بمخطط هاسه بين هل هي شبكة توزيعية وهل هي شبكة مودولية .

2 ، 3 ، 5 ، 30 ، 1

الحل :

$$2 \wedge (3 \vee 5) = 2$$
$$(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1$$
} ≠

غير متساويين وبالتالي الشبكة ليست توزيعية

من اجل $a = 1$ فإن $a \leq z$ عندئذ

$$1 \vee (y \wedge z) = y \wedge z$$
$$(1 \vee y) \wedge z = y \wedge z$$
} ⇐ متساويان

الشبكة مودولية .

من اجل $a \neq 1$ عندئذ أن $a \leq z$ فإن $z = 30$

$$a \vee (y \wedge z) = a \vee y$$
$$(a \vee y) \wedge z = a \vee y$$
} ⇐ متساويان

وبالتالي فإن الشبكة السابقة الممثلة بعلاقة هاسه ومرتبة جزئياً وفق علاقة القسمة هي شبكة مودولية .

ما هو الشرط اللازم والكافي حتى تكون الشبكة شبكة مودولية ؟ الجواب من خلال المبرهنة :

مبرهنة هامة :

إن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة مودولية إذا وفقط إذا حققت عناصرها الشرط التالي :

إذا كان $x \vee z = y \vee z$ و $x \wedge z = y \wedge z$ فإنه إما $x = y$

أو x و y غير متقارنين .

الإثبات :

⇐ لزوم الشرط :

لنفرض أن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة مودولية عندها إذا كان وكان الشرط محققاً

z, y غير متقارنين تم المطلوب

وإذا كان x, y متقارنين أي أن $x \leq y$ عندها فإن :

$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = x \vee (z \wedge y)$ اعتماداً على خاصية الامتصاص.

وبما أن الشبكة E هي شبكة معدولية فإن :

$= (x \vee z) \wedge y$

$= (y \vee z) \wedge y = y$ حسب خاصية الامتصاص.

$\Rightarrow$ كفاية الشرط :

لتكن x, y, z عناصر اختيارية من الشبكة حيث $x \leq z$

ولنضع :

$a = x \vee (y \wedge z)$, $b = (x \vee y) \wedge z$

نلاحظ أن $a \leq b$ لأن

$a = x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z = b$

كما أن :

$a \wedge y = [x \vee (y \wedge z)] \wedge y \geq [x \vee (y \wedge z)] \wedge (y \wedge z) =$

$= (y \wedge z)$

$b \wedge y = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y = [(x \vee y) \wedge y] \wedge z = y \wedge z$

$\Rightarrow \quad a \wedge y \geq b \wedge y \quad \ldots\ldots (P)$

وبما أن $a \leq b$ فإن :

$a \wedge y \leq b \wedge y$ إلى ..... (بما)

ومن العلاقة (P) الأخيرة ينتج أن :

$a \wedge y = b \wedge y \quad \ldots\ldots (1)$

وكذلك وبنفس الطريقة فإن

$a \vee y = [x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$

$b \vee y = [(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq [(x \vee y) \wedge z] \vee (x \vee y) = (x \vee y)$

$\Rightarrow b \vee y \leq a \vee y$ .... (أ)

وبالمثل : $a \leq b$ فإن :

$b \vee y \geq a \vee y$ ..... (ب)

ومن (أ) و(ب) نجد أن :

$a \vee y = b \vee y$ ..... (2)

ومن (1) و(2) وحسب الفرض نجد أن $a = b$ ، والشبكة موديولية .

مبرهنة هامة :

إن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ هي شبكة توزيعية إذا وفقط إذا حققت عناصرها الشرط التالي :

إذا كان :

$x \wedge z = y \wedge z$ و $x \vee z = y \vee z$ فإن $x = y$

الإثبات :

$\Leftarrow$:

إذا كان $x \wedge z = y \wedge z$, $x \vee z = y \vee z$ وبما أن الشبكة توزيعية ومنه :

$x = x \vee (x \wedge z) = x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) =$ حسب خاصة الامتصاص

بما أن الشبكة توزيعية فإن :

$= (x \vee y) \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z) = y \vee (y \wedge z) = y$

$\Rightarrow$:

إن الشبكة $(E, \leq, \vee, \wedge)$ وحسب المبرهنة السابقة هي شبكة موديولية

ولتكن a, b, c ثلاثة عناصر اختيارية من الشبكة E ولنضع :

$x = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)]$ ..... (1)

$y = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)]$ ..... (2)

وبما أن $(a \wedge b) \leq (a \vee b)$ فيكون :

$$x = [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \ldots (*)$$

وبما أن $(b \wedge c) \leq (b \vee c)$ فإن :

$$y = [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) \ldots (**)$$

ومنه نجد حسب (*) :

$$x \wedge b = [(a \wedge b) \vee c] \wedge b =$$

وبما أن الشبكة موديولية فإنه :

$$= (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$$

وأيضاً حسب (**)

$$y \wedge b = [(b \wedge c) \vee a] \wedge b =$$

وبما أن الشبكة موديولية فإنه

$$= (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$$

ومن المساواتين السابقتين نستنتج أن :

$$x \wedge b = y \wedge b \ldots (1)'$$

كما أن : من الشرط (1)

$$x \vee b = b \vee [c \wedge (a \vee b)] =$$

وكون الشبكة موديولية

$$= (b \vee c) \wedge (a \vee b)$$

من شرط (2) :

$$y \vee b = b \vee [a \wedge (b \vee c)] =$$

وكون الشبكة موديولية

$$(b \vee a) \wedge (b \vee c)$$

ومن المساواتين ينتج أن :

$$x \vee b = y \vee b \ldots (2)'$$

ومن $(1)'$ و $(2)'$ وحسب الشرط ينتج أن $x = y$

ومنه ينتج أن

$$x \wedge a = y \wedge a$$

وبالاعتماد حسب (*) فإن :

$$x \wedge a = [(a \wedge b) \vee c] \wedge a = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

بما أن الشبكة مودولية

ومن (**) نجد أن :

$$y \wedge a = a \wedge [a \vee (b \wedge c)] \wedge (b \wedge c) = a \wedge (b \wedge c)$$

حسب خاصية الامتصاص.

ومنه لدينا $x \wedge a = y \wedge a$ وبالتالي :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

وبالتالي الشبكة توزيعية.

الشبكات المتممة :

تمهيد

في هذا النوع من الشبكات بشكل دائم يجب أن تحتوي على عنصرين هامين هما العنصر الأكبر ونرمز له بالرمز (1) والعنصر الأصغر والذي نرمز له بـ (0)

- تعريف :

لتكن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة ما تحتوي على العنصرين 0 , 1 وليكن x عنصر ما من E عندئذ نقول عن العنصر x' من E أنه متمم للعنصر x إذا حقق الشرطان التاليان :

$$x \vee x' = 1 \quad , \quad x \wedge x' = 0$$

مثال 1 : $(\mathcal{P}(E), \leq, \vee, \wedge)$

في هذه الشبكة يوجد عنصران :

$0 = \phi$ العنصر الأصغر

$1 = E$ العنصر الأكبر

$A \in \mathcal{P}(E)$

إن متمم العنصر A هو

$$B = E \setminus A$$

مثال 2

لنتأمل الشبكة الممثلة بمخطط هاس التالي :

ما هو متمم العنصر d و a .

الحل :

العنصر	المتمم
d	a , c
a	e , d , f , b

ملاحظة :

إن كل شبكة تحتوي العنصرين (1) و (0) فإن متمم العنصر (0) هو (1) ومتمم العنصر (1) هو (0) وإذا كان x' متمم للعنصر x فإن x هو متمم للعنصر x'

س/ تعريف شبكة المتممات :

نسمي الشبكة $(E, \leq, \wedge, \vee)$ شبكة متممات (أو شبكة متممة) إذا كانت تحتوي على العنصرين (1) و (0) وكان لكل عنصر من عناصرها متمم واحد على الأقل.

مثال 1 : $(P(E), \subseteq, \vee, \wedge)$ هي شبكة متممات ولكل عنصر متمم واحد فقط .

مثال 2 : إن الشبكة $D(6)$ أي $(D(6), |, \vee, \wedge)$ هي شبكة متممات ولكل عنصر من عناصرها متمم وحيد .

عنصر الأصغر $0 = 1$

عنصر الأكبر $1 = 6$

مثال 3 . هل الشبكة الممثلة بمخطط هاس هي شبكة متممات

ليست شبكة متممات
لأننا وجدنا عنصر واحد على الأقل مثل a وليس له متمم.

(شكل: مخطط هاس بالعناصر 1 ، c ، a ، b ، 0)

مثال 4 - ارسم مخطط هاس للمجموعات المرتبة جزئياً بعلاقة القسمة:
D(12) ، D(24)

إذا كانت الشبكة توزيعية ووجد لكل عنصر متمم ولكن هنا المتمم وحيد.

(شكل: D(12) بالعناصر 12 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1)

D(12)

العنصر متمم العناصر 2 ، 6 في D(12) ؟ لا يوجد لا متممات وبالتالي هي ليست شبكة متممات:

(شكل: D(24) بالعناصر 24 ، 12 ، 8 ، 6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1)

شبكة ليست شبكة متممات ولكن هي شبكة توزيعية.

D(24)

مثال 5 - ارسم مخطط هاس لـ D(30) بالنسبة لعلاقة القسمة وهل هي شبكة متممات.

الحل: نحن نعلم من أجل أي عددين طبيعيين $m \neq 0$ ، $n \neq 0$

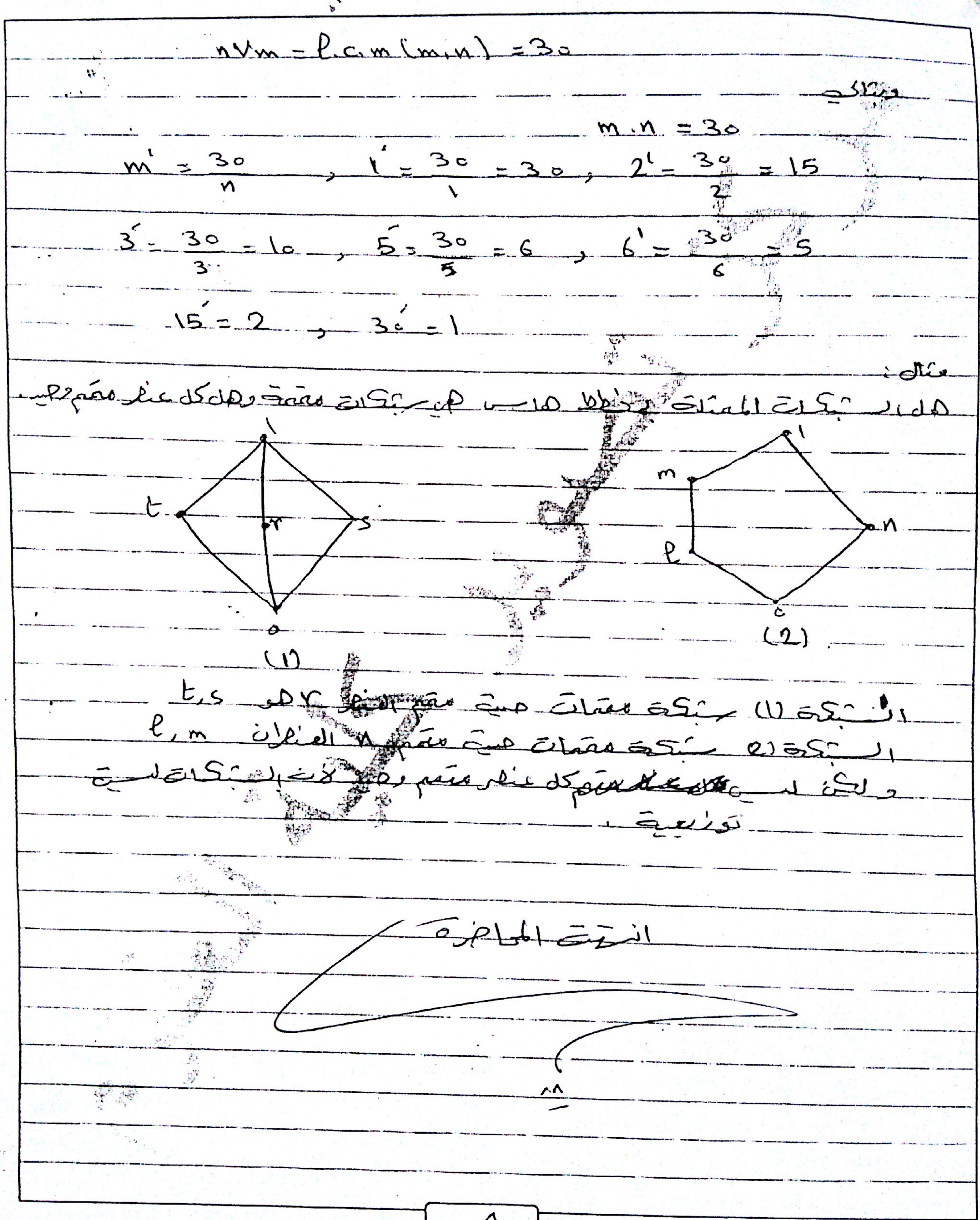
$g.c.d(m,n) \cdot l.c.m(m,n) = m.n$

أصغر عنصر في الشبكة هو العدد (1) أي $a=1$

والعنصر الأكبر 30 أي $b=30$

وإذا كان m متمم لـ n فإن

$n \wedge m = g.c.d(m,n) = 1$



$n \vee m = l.c.m(m,n) = 30$

وبالتالي

$m.n = 30$

$m' = \frac{30}{n}$ ، $1' = \frac{30}{1} = 30$ ، $2' = \frac{30}{2} = 15$

$3' = \frac{30}{3} = 10$ ، $5' = \frac{30}{5} = 6$ ، $6' = \frac{30}{6} = 5$

$15' = 2$ ، $30' = 1$

مثال :

هل الشبكات الممثلة بمخطط هاسي هي شبكات متممة وهل كل عنصر متمم وحيد

الشبكة (1) شبكة متممات حيث متمم العنصر r هو s, t

الشبكة (2) شبكة متممات حيث متمم n العنصران m, l

ولكن ليس كل عنصر متمم وحيد لأن الشبكة ليست توزيعية.

انتهت المحاضرة